Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

ЛОГИКА, ОТРЕЗКИ И МНОЖЕСТВА: ЗАДАЧИ ПОД НОМЕРОМ 18

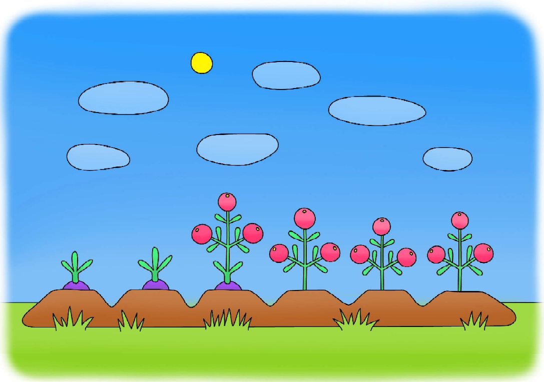
Задачи с отрезками и множествами – это разновидности задания № 18 в ЕГЭ по информатике. Как правило, эти задачи достаточно просты и можно рассчитывать «взять» на них свой балл, – если, конечно, знать, как они решаются.

Первая разновидность таких заданий предполагает оперирование логическим выражением, в котором логическими переменными являются принадлежность или непринадлежность точек заданным отрезкам («геометрическая» интерпретация логических переменных).

Задача 1. На числовой прямой даны два отрезка: P = [43, 49] и Q = [44, 53]. Укажите наибольшую возможную длину отрезка A, для которого формула

$$((x \in \mathrm{A}) \to (x \in \mathrm{P})) \vee (x \in \mathrm{Q})$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.



Решение

1. Прежде всего, во всех подобных задачах нужно упростить логическое выражение, вводя «обычные» логические переменные и преобразуя «сложные» операции (такие как следование, эквивалентность и пр.) в более простые «базовые» операции И, ИЛИ и НЕ.

• Заменяем высказывания о принадлежности отрезкам логическими переменными: $a = (x \in \mathrm{A})$, $p = (x \in \mathrm{P})$, $q = (x \in \mathrm{Q})$. Тогда исходное логическое выражение принимает вид:

$$(a \to p) \vee q$$

• Избавляемся от операции следования, используя всем известное соотношение $x \to y = \neg x \vee y$:

$$(a \to p) \vee q \quad \Rightarrow \quad \neg a \vee p \vee q.$$

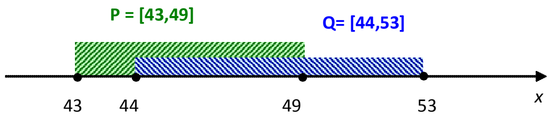
2. Нам нужно обеспечить тождественное равенство этого выражения единице на всей числовой оси. Поскольку мы обозначили логическими переменными принадлежность отрезкам («$x \in$»), значения этих логических переменных равны 1 в пределах соответствующих отрезков и 0 – вне этих отрезков (причем границы входят в отрезки).

3. Анализируем полученное уравнение $\neg a \vee p \vee q = 1$.

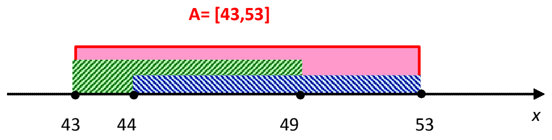
• Все переменные соединены операцией ИЛИ, то есть результат 1 будет автоматически обеспечен, если ***хотя бы одна из переменных*** – p или q – равна 1 (везде, где числовая прямая «закрыта» хотя бы одним отрезком – P или Q).

• Там, где нет ни отрезка P, ни отрезка Q (то есть обе переменные p и q равны 0), для обеспечения истинности результата должна быть равна 1 переменная $\neg a$, или, соответственно, переменная a должна быть равна 0 (отрезка A не должно быть нигде, где нет ни отрезка P, ни отрезка Q).

4. Рисуем числовую прямую и изображаем на ней отрезки P и Q:



5. Теперь очевидно, как расположить на этой числовой прямой отрезок A, чтобы он нигде «не высовывался» за пределы области, закрытой хотя бы одним отрезком P или Q, и при этом имел наибольшую возможную длину:



6. А теперь нужно правильно вычислить длину полученного отрезка A. Помним, что речь идет о множестве расположенных на числовой прямой натуральных чисел. В данном случае это не имеет особого значения, но в других аналогичных задачах при выполнении операции отрицания границы отрезка A могут быть «выколоты» (могут не входить в отрезок), и тогда нужно при вычислении длины отрезка брать соседние натуральные граничные значения *внутри* отрезка. В нашем же случае конечные точки 43 и 53 входят в отрезок A.

Теперь вспомним, как мы вычисляем длину отрезка на обычной сантиметровой линейке, – например, между отметками 1 см и 3 см. Длина этого отрезка равна двум сантиметровым ***интервалам*** между указанными отметками на шкале линейки, т.е. вычисляется как разность значений. Точно так же нужно поступить и здесь, поэтому длина отрезка A равна 53 – 43 = 10.

Ответ: 10.

Задача 2. На числовой прямой даны три отрезка: P = [10, 30], Q = [15, 30] и R = [20, 35]. Определите такой интервал A, что формулы

$$(x \notin A) \to (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \to (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

Решение

Отличие от предыдущей задачи – в том, что если там нужно было обеспечить, чтобы выражение всегда было истинно, то теперь нужно для обоих заданных выражений обеспечить одинаковые значения (оба истинны или оба ложны). Однако принцип решения остается аналогичным.

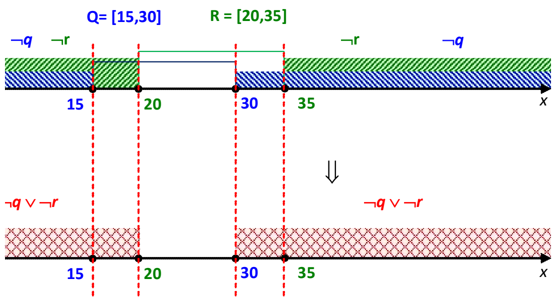
1. Заменяем высказывания о принадлежности отрезкам логическими переменными: $a = (x \in \mathrm{A})$, $p = (x \in \mathrm{P})$, $q = (x \in \mathrm{Q})$, $r = (x \in \mathrm{R})$. Тогда исходные логические выражения принимают вид:

$$\neg a \to \neg p \quad \text{и} \quad q \to \neg r.$$

Избавляемся от операции следования, используя соотношение $x \to y = \neg x \vee y$:

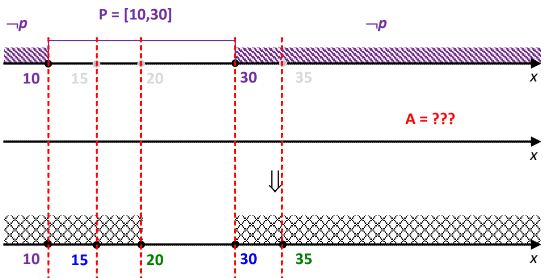
$$\neg a \to \neg p \;\Rightarrow a \vee \neg p, \quad q \to \neg r \;\Rightarrow\; \neg q \vee \neg r.$$

2. В первом из этих двух выражений имеется искомая переменная a. Во втором же выражении нам все переменные известны (заданы соответствующие отрезки), следовательно, второе выражение будет для нас «опорным». Графическим способом ищем интервал(ы), где второе выражение является истинным, а где – ложным:



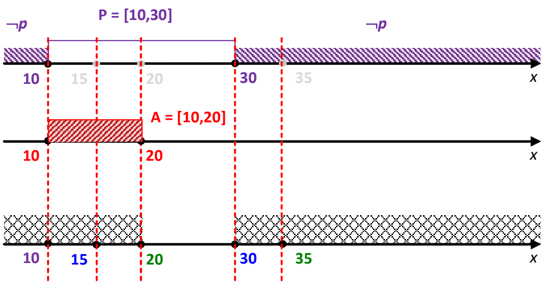
3. Для первого выражения строим известный нам отрезок P и интервал истинности соответствующей переменной p. Под ним строим «заготовку» для искомого интервала A, а еще ниже – дублируем ранее найденные интервалы истинности всего выражения

(как первого, так и второго, так как по условию они должны быть одинаковыми).



Если первое выражение имеет вид: $a \vee \neg p$ и нам нужно обеспечить для него указанные интервалы истинности, то каким должен быть интервал А?

Графически это означает, что нам нужно «дозакрасить» на числовой прямой участок, который «закрашен» на чертеже для всего выражения, но не «закрашен» на чертеже с отрезком Р. И как это сделать – совершенно очевидно.



Ответ: интервал [10,20].

Теперь перейдем к другой группе задач, появляющихся в ЕГЭ под тем же номером 18.

Задача 3. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(n \in \{2,3,6,8,10\}) \to (((n \in \{1,3,6,7,9\}) \wedge$
$\wedge \neg(n \in X)) \to \neg(n \in \{2,3,6,8,10\}))$

истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное значение произведения элементов множества X.

Решение

1. Начало решения в этой задаче точно такое же, как и в предыдущих: вводим для используемых в выражении множеств обозначения в виде латинских букв R и Q, а затем заменяем записи условий принадлежности переменной n соответствующему множеству одноименными логическими переменными:

• множества: Q = {2,3,6,8,10},
R = {1,3,6,7,9}, X – искомое множество;

• логические переменные:
$q = (n \in \{2,3,6,8,10\})$, $r = (n \in \{1,3,6,7,9\})$, $x = (n \in \text{X})$.

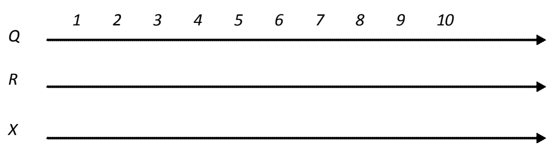
Переписываем заданное логическое выражение с учетом этих замен и выполняем его упрощение, избавляясь от операции следования и, по возможности, от скобок:
$(n \in \{2,3,6,8,10\}) \to (((n \in \{1,3,6,7,9\}) \neg (n \in \text{X})) \to$
$\to \neg(n \in \{2,3,6,8,10\})) \Rightarrow$
$\Rightarrow q \to ((r \wedge \neg x) \to \neg q)$, или в более удобной записи операции отрицания в виде надчеркивания: $q \to ((r \wedge \bar{x}) \to \bar{q})$.

Упрощаем это выражение, пользуясь правилом замены операции следования на операцию ИЛИ ($x \to y = \bar{x} \vee y$):

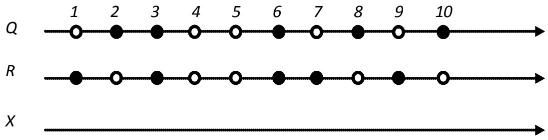
$$q \to ((r \wedge \bar{x}) \to \bar{q}) \Rightarrow \bar{q} \vee (\overline{(r \wedge \bar{x})} \vee q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{q} \vee (\bar{r} \vee x \vee \bar{q}) \Rightarrow \bar{q} \vee \bar{r} \vee x \vee \bar{q} \Rightarrow \bar{q} \vee \bar{r} \vee x.$$

2.Теперь перейдем к графической части решения.

Нарисуем числовые прямые, соответствующие множествам Q, R и X (лучше всего делать это на тетрадном листке в клеточку). Разметим на них позиции, соответствующие ***всем возможным числам***, используемым в заданных множествах (в данном случае – от 1 до 10, так как наименьшее число, встречающееся в заданных множествах, равно 1, а наибольшее равно 10).

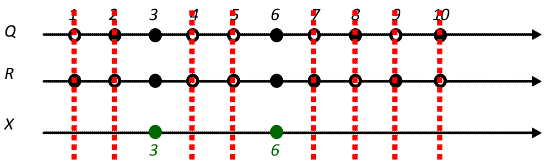


На числовой прямой, соответствующей множеству Q, размечаем точки по следующему правилу: для числа, которое ***есть*** в этом множестве, точка должна быть ***черной*** (закрашенной), а для числа, которого ***нет*** в этом множестве, точка должна быть белой (в виде пустого кружочка). Затем то же самое сделаем и для числовой прямой, соответствующей множеству *R*.



3. Посмотрим на получившееся у нас логическое выражение: $\bar{q} \vee \bar{r} \vee x$. В нем заданные нам (в виде условий принадлежности чисел соответствующим множествам) значения $\bar{q}$ и $\bar{r}$ связаны друг с другом и с переменной x логической операцией ИЛИ. Для гарантированной истинности этого выражения достаточно, чтобы ***хотя бы одно*** из значений – $\bar{q}$ или $\bar{r}$ – было истинно.

В нашем графическом методе действует правило: ***для переменной без надчеркивания*** (то есть без отрицания) «истинными» являются ***черные*** точки, а ***для переменной с надчеркиванием*** (то есть под отрицанием) «истинными» являются ***белые*** точки. У нас переменные q и r записаны с надчеркиванием. Поэтому на нашем рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями все такие числовые позиции, где на осях *Q* и *R* есть ***хотя бы одна белая точка***. А в позициях, которые на числовой прямой множества *X* остались не зачеркнутыми, проставляем «черные» точки (для большей наглядности мы их выделим зеленым цветом).



Задача практически решена: найденные значения – числа 3 и 6 – это и есть минимально необходимые элементы множества *X*, обеспечивающие истинность заданного выражения на всей числовой прямой для натуральных чисел.

Завершить же вычисления – подсчитать количество элементов множества *X*, их сумму или произведение – уже совсем просто. В нашей задаче требуется произведение – оно равно $3 \times 6 = 18$.

Ответ: 18.

Задача 4. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

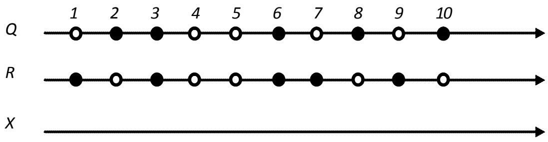
$$\neg(n \in \{2,3,6,8,10\}) \wedge \neg(n \in \{1,3,6,7,9\}) \vee (n \in \mathrm{X})$$

истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное количество элементов множества X.

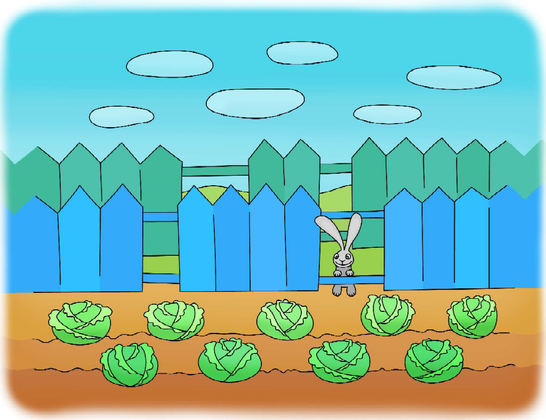
Решение

1. Аналогично предыдущим задачам, обозначаем множества латинскими буквами и вводим соответствующие переменные. После выполнения всех замен получаем выражение в виде: $\bar{q} \wedge \bar{r} \vee x$.

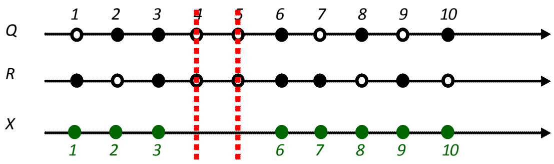
2. Переходим к графической части решения. Рисуем числовые прямые, соответствующие множествам Q, R и X, и размечаем на них точки по тем же правилам (если число есть в множестве, то точка черная, если числа нет – точка белая).



3. В полученном логическом выражении $\bar{q} \wedge \bar{r} \vee x$ заданные значения $\bar{q}$ и $\bar{r}$ связаны друг с другом логической операцией И, которая выполняется первой (до операции ИЛИ с переменной x). Для гарантированной истинности такого выражения требуется, чтобы ***оба*** значения – $\bar{q}$ и $\bar{r}$ – были истинными. Поскольку переменные q и r в нашем выражении записаны ***с надчеркиванием***, «истинными» для нас являются ***белые*** точ-



ки. Поэтому на рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями все такие числовые позиции, где на осях Q и R ***обе точки белые***. Оставшиеся позиции на числовой прямой для множества X заполняем «черными» (точнее, зелеными) точками.



И опять задача практически решена: найденные значения – это минимально необходимые элементы множества X. Их количество легко подсчитать – их 8.

Ответ: 8.

Заметим, что осмысленный числовой ответ на такую задачу возможен только при условии, что искомое множество будет содержать минимально возможное количество элементов (иначе ответ либо неоднозначен, либо вообще не может быть дан, если, например, в множестве X будет бесконечно много элементов). Отсюда следует, что в любом случае числовой луч от наибольшего существующего в заданных множествах элемента и до «плюс бесконечности» не должен входить в решение задачи (в множество X). А поскольку этому числовому лучу соответствуют элементы, отсутствующие в обоих заданных множествах (которые тоже не могут быть бесконечными), в упрощенном логическом выражении переменные q и r могут быть только с надчеркиваниями (иначе эту часть числового луча не удастся исключить из решения). А это, в свою очередь, означает, что вычеркивать мы будем на рисунке только белые точки (позиции, где таких точек хотя бы одна либо где такие точки обе).

Правда, разработчики заданий ЕГЭ могут, в принципе, и переформулировать задачу. Например, так.

Задача 5. Элементами множества X являются натуральные числа. Известно, что выражение

$\neg(n \in \{2,3,6,8,10\}) \vee (n \in \{1,3,6,7,9,11\ldots\}) \vee$
$\vee\ (n \in X) \vee \neg(n \in \{2,3,6,8,10\})$

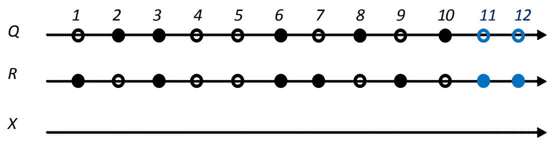
истинно (принимает значение 1) при любом значении n. Требуется определить наименьшее возможное значение суммы элементов множества X.

Решение

1. Выполнив замены и упростив выражение, получаем:

$$\bar{q} \vee r \vee x \vee \bar{q} \Rightarrow \bar{q} \vee r \vee x\,.$$

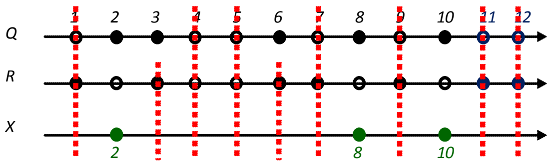
Как видим, переменная r здесь записана без надчеркивания. Но и множество R тоже задано по-особому: R = {1,3,6,7,9,11…} – оно имеет бесконечное число элементов, то есть в него входят ***все*** натуральные числа начиная с 10 и до «плюс бесконечности». Поэтому на числовых прямых мы проставляем черные точки (для R) и белые точки (для Q) правее 10 (реально рисуем одну-две такие дополнительные позиции, но подразумеваем, что они длятся вправо до бесконечности). На нашем рисунке эти дополнительные точки мы изобразим синим цветом.



В полученном логическом выражении $\bar{q} \vee r \vee x$ заданные значения $\bar{q}$ и r связаны друг с другом логической операцией ИЛИ. Значит, для гарантированной истинности этого выражения достаточно, чтобы истинным было хотя бы одно значение – $\bar{q}$ или r. Переменная q в нашем выражении записана ***с надчеркиванием***, поэтому «истинными» являются ***белые*** точки. А вот для переменной r, записанной ***без надчеркивания***, «истинными» являются уже ***черные*** точки.

Поэтому на рисунке мы вычеркиваем вертикальными линиями сначала все числовые позиции, где ***на оси Q*** расположены ***белые*** точки, а затем среди оставшихся позиций – все, где ***на оси R*** расположены ***черные*** точки. При этом числовые позиции начиная от значения 11 и до «плюс бесконечности», очевидно, тоже будут вычеркнуты.

Оставшиеся позиции на числовой прямой для множества X, как и раньше, заполняем «черными» (зелеными) точками.



Найдя минимально необходимые значения элементов множества X: {2,8,10}, вычисляем их сумму: 2 + 8 + 10 = 20.

Ответ: 20.

Наконец, третья группа задач, недавно появившихся в составе задания № 18, представляет собой своего рода «высший пилотаж». Это – задания на поразрядную конъюнкцию, и их появление в ЕГЭ тем более удивительно, что *ни в одном из существующих, прогрифованных и рекомендованных Министерством образования и науки РФ учебников по информатике нет ни слова о поразрядных логических операциях! То есть учащихся, по сути, на экзамене спрашивают о том, чего они вообще не изучали!* Данная тема появится только в новых учебниках, которые лишь летом 2016 года были написаны и к концу 2016 года должны были быть прогрифованы. Но воз, похоже, и ныне там…

Однако, как бы ни было, нам нужно учиться решать такие задачи. Поэтому начнем с теоретического вступления.

Поразрядные логические операции над двоичными числами

Кроме «обычных» логических операций, производимых над логическими переменными, возможны «поразрядные» логические операции над двоичными числами.

При выполнении поразрядной операции прежде всего необходимо, чтобы оба двоичных числа имели одно и то же количество цифр (имели одинаковую разрядность). Для этого число с меньшим количеством разрядов нужно дополнить слева незначащими нулями.

Затем оба числа записываются друг над другом (так же, как, например, при двоичном сложении).

После этого для каждой пары двоичных цифр, стоящих в одном и том же разряде чисел, выполняется заданная логическая операция (считая, что двоичные цифры 0 и 1 обозначают соответственно ложь и истину). Результат выполнения операции (0 или 1) записывается в соответствующем разряде итогового числа.

Пример

Выполнить операцию «поразрядное И» над числами 10110_2 и 1110001_2.

Решение

1. Дополняем число 10110_2 незначащими нулями слева до 7 цифр (разрядов): 0010110_2.

2. Записываем оба числа друг под другом и выполняем логическую операцию И над каждой парой двоичных цифр, стоящих в одном и том же разряде:

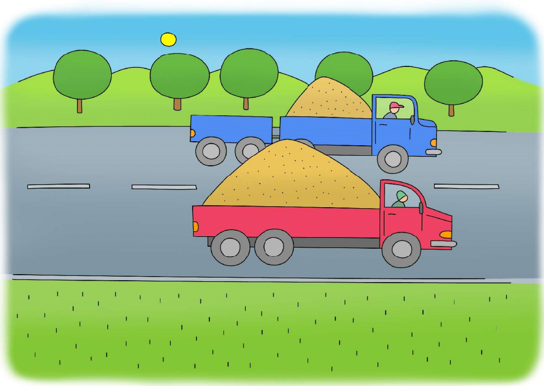
3. В полученном числе отбрасываем незначащие нули слева.

0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0

Ответ: 10000_2.

Данная операция, кстати, используется при решении задач с определением адреса сети по заданному полному IP-адресу и маске сети.

Перейдем теперь к решению задач на поразрядную конъюнкцию.



Задача 6. Обозначим через & поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа P формула

$$A \,\&\, 61 \neq 0 \to (A \,\&\, 49 = 0 \to A \,\&\, P \neq 0)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной A)?

Решение

1. Преобразуем заданное логическое выражение, чтобы заменить операцию следования на операции И, ИЛИ, НЕ. Используем квадратные скобки, чтобы сделать запись выражения более понятной.

$$[\mathrm{A} \,\&\, 61 \neq 0] \to ([\mathrm{A} \,\&\, 49 = 0] \to [\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{[\mathrm{A} \,\&\, 61 \neq 0]} \vee (\overline{[\mathrm{A} \,\&\, 49 = 0]} \vee [\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0]).$$

2. Отрицанием операции сравнения «равно» является операция сравнения «не равно», и, наоборот, отрицанием операции сравнения «не равно» является операция сравнения «равно». Кроме того, убираем из выражения круглые скобки.

$$\overline{[\mathrm{A} \,\&\, 61 \neq 0]} \vee (\overline{[\mathrm{A} \,\&\, 49 = 0]} \vee [\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\mathrm{A} \,\&\, 61 = 0] \vee [\mathrm{A} \,\&\, 49 \neq 0] \vee [\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0].$$

3. Нам нужно, чтобы при любом значении A значение этого выражения было истинным. При использовании операции «ИЛИ» для этого достаточно, чтобы был истинным хотя бы один операнд.

4. Рассмотрим операцию поразрядной конъюнкции A & 61. Представим число 61 как сумму степеней двоек:

$$61 = 32 + 16 + 8 + 4 + 1 \; (61_{10} = 111101_2).$$

Тогда, чтобы результат поразрядной конъюнкции A & 61 был равен нулю, необходимо соблюсти условие: $A \notin \{1, 4, 8, 16, 32\}$ (то есть в числе A ***не должно быть*** таких единичных битов, которые формируют указанные степени двойки).

5. Рассмотрим операцию поразрядной конъюнкции A & 49. Представим число 49 как сумму степеней двоек: 49 = 32 + 16 + 1 ($49_{10} = 110001_2$).

Тогда, чтобы результат поразрядной конъюнкции A & 49 не был равен нулю, необходимо соблюсти условие: $A \in \{1, 16, 32\}$ (то есть в числе A ***должен быть хотя бы один*** такой единичный бит, который формирует указанные степени двойки).

6. Итак, в ситуациях, когда $A \notin \{1, 4, 8, 16, 32\}$ ИЛИ $A \in \{1, 16, 32\}$, заданное выражение гарантированно истинно. Нас же интересует обратная ситуация, когда истинность обеспечивается условием $A \,\&\, P \neq 0$ и, соответственно, $\mathrm{A} \in \{1, 4, 8, 16, 32\}$ И $A \notin \{1, 16, 32\}$, то есть: $A \in \{4, 8\}$. Тогда $P = 8 + 4 = 12$.

Ответ: 12.

Мнемоническое правило: если в рассматриваемом условии записано **равенство**, то оно соответствует **непринадлежности** множеству чисел-степеней двойки. И наоборот, **неравенству** соответствует **принадлежность** множеству чисел-степеней двойки.

Для условия $A \,\&\, P \neq 0$ рассматривается *обратная* ситуация истинности условий.

Задача 7. Обозначим через & поразрядную конъюнкцию неотрицательных чисел. Для какого наибольшего натурального числа P формула

$$A \,\&\, P \neq 0 \to (A \,\&\, 12 = 0 \to A \,\&\, 68 \neq 0)$$

тожденсвенно истинна (то есть принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной A)?

Решение

Эта задача отличается от предыдущей иным порядком следования операндов (условий сравнения) в заданном логическом выражении и поиском ***наибольшего*** соответствующего условиям задачи числа.

1. Преобразуем заданное логическое выражение, чтобы заменить операцию следования на операции И, ИЛИ, НЕ. Используем квадратные скобки, чтобы сделать запись выражения более понятной.

$$[\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0] \to ([\mathrm{A} \,\&\, 12 = 0] \to [\mathrm{A} \,\&\, 68 \neq 0]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{[\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{P} \neq 0]} \vee (\overline{[\mathrm{A} \,\&\, 12 = 0]} \vee [\mathrm{A} \,\&\, 68 \neq 0]).$$

2. Отрицанием операции сравнения «равно» является операция сравнения «не равно», и наоборот, отрицанием операции сравнения «не равно» является операция сравнения «равно». Кроме того, убираем из выражения круглые скобки.

$$\overline{[A \mathbin{\&} P \neq 0]} \vee (\overline{[A \mathbin{\&} 12 = 0]} \vee [A \mathbin{\&} 68 \neq 0]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [A \mathbin{\&} P = 0] \vee [A \mathbin{\&} 12 \neq 0] \vee [A \mathbin{\&} 68 \neq 0].$$

3. Нам нужно, чтобы при любом значении A значение этого выражения было истинным. При использовании операции «ИЛИ» для этого достаточно, чтобы был истинным хотя бы один операнд.

4. Рассмотрим операцию поразрядной конъюнкции A & 12. Представим число 12 как сумму степеней двоек:

$$12 = 8 + 4\ (12_{10} = 1100_2).$$

Тогда, чтобы результат поразрядной конъюнкции A & 12 не был равен нулю, необходимо соблюсти условие: $A \in \{8, 4\}$ (то есть в числе A ***должен быть хотя бы один*** такой единичный бит, который формирует указанные степени двойки).

5. Рассмотрим операцию поразрядной конъюнкции A & 68. Представим число 68 как сумму степеней двоек:

$$68 = 64 + 4\ (68_{10} = 1000100_2).$$

Тогда, чтобы результат поразрядной конъюнкции A & 68 не был равен нулю, необходимо соблюсти условие: $A \in \{64, 4\}$ (то есть в числе A ***должен быть хотя бы один*** такой единичный бит, который формирует указанные степени двойки).

6. Итак, в ситуациях, когда $A \in \{8, 4\}$ ИЛИ $A \in \{64, 4\}$, заданное выражение гарантированно истинно. Нас же интересует ситуация, когда истинность обеспечивается условием A & $P = 0$. Ему соответствует *та же самая* запись $A \in \{8, 4\}$ ИЛИ $A \in \{64, 4\}$, то есть: $A \in \{64, 8, 4\}$. Тогда $P = 64 + 8 + 4 = 76$.

Последнее рассуждение легко понять, если учесть следующее. Ранее мы показали, что истинность выражения гарантирована, если в числе A есть **хотя бы один** такой единичный бит, который формирует соответствующие степени двойки. Тогда нас интересует обратная ситуация – когда **все** указанные биты равны нулю (а состояние остальных битов безразлично). И в этой ситуации требуется найти **наибольшее** число P, при котором соблюдается истинность условия A & $P = 0$. Но раз **все** указанные биты в числе A – нулевые, а состояние остальных битов безразлично, мы для получения наибольшего возможного числа P просто выбираем **все** указанные биты в числе P равными 1 (так как все равно они будут «погашены в нули» соответствующими нулевыми битами числа A).

Ответ: 76.

Богомолова Ольга Борисовна, доктор педагогических наук, почётный работник сферы образования Российской Федерации, учитель информатики и математики ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва,

Усенков Дмитрий Юрьевич, Московский государственный институт индустрии туризма имени Ю.А. Сенкевича, г. Москва.